# ANCOVA und Moderationsanalyse

by Woche 14

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import statsmodels.api as sm
import statsmodels.formula.api as smf
import scipy.stats as stats
np.random.seed(42)  # für reproduzierbare Ergebnisse
```

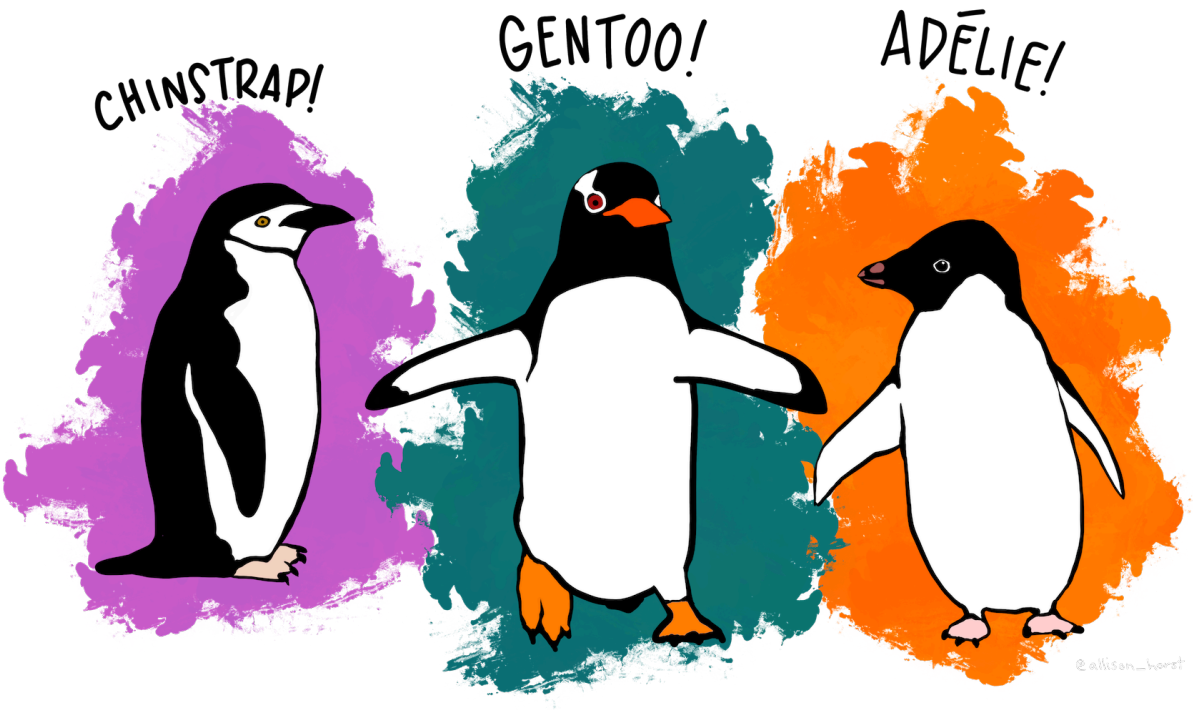
In den vorangegangenen Kapiteln haben wir verschiedene statistische Modelle kennengelernt: Modelle mit einer oder mehreren **kategorischen Variablen** (t-Test, ANOVA), sowie Modelle mit einer oder mehreren **metrischen Variablen** (einfache und multiple lineare Regression, Polynomregression). Doch natürlich kann es auch vorkommen, dass wir beide Arten von Variablen in einem Modell kombinieren möchten.

Genau diese Kombination ist der Fokus dieses Kapitels. Wir werden zwei verwandte Ansätze kennenlernen: die **ANCOVA** (Analysis of Covariance) und die **Moderationsanalyse**. Der entscheidende Unterschied zwischen beiden liegt darin, ob die kategorische und die metrische Variable miteinander **interagieren** oder nicht.

## Ein Beispiel zur Motivation

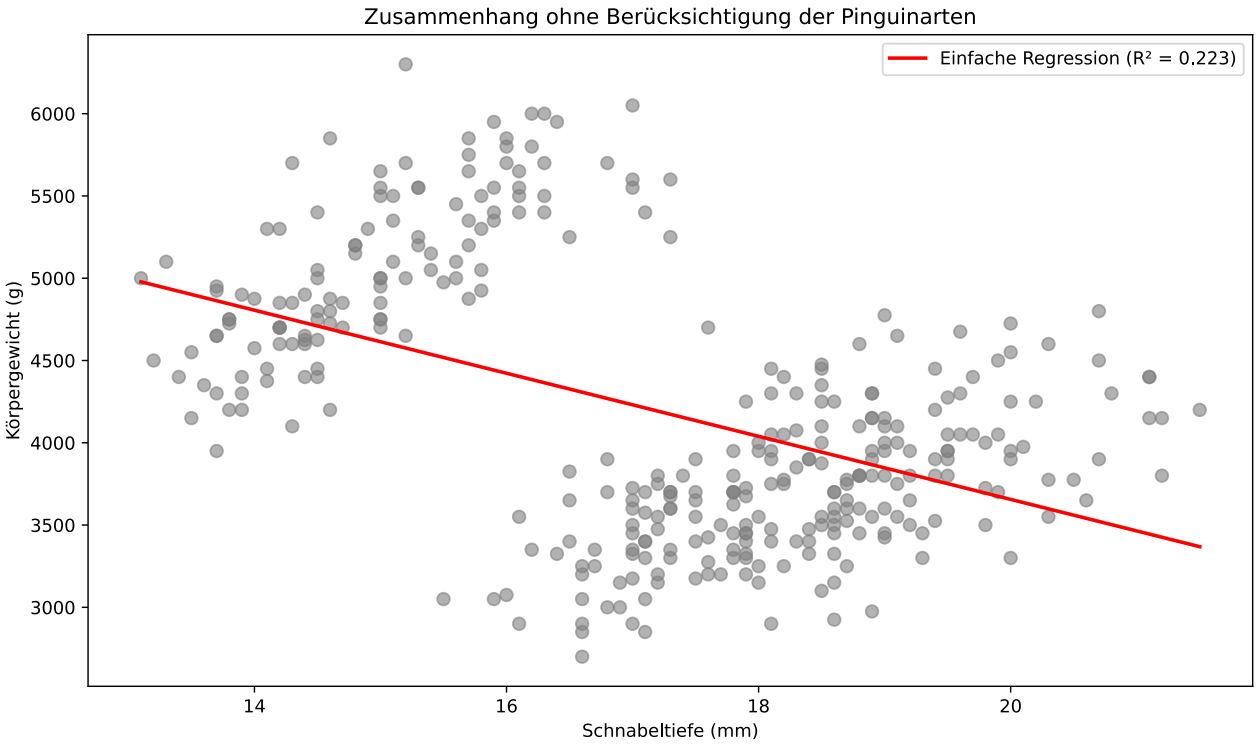
Betrachten wir zunächst ein Beispiel aus dem Palmer Penguins Datensatz. Stellen wir uns vor, wir interessieren uns für den Zusammenhang zwischen der Schnabeltiefe (`bill_depth_mm`) und dem Körpergewicht (`body_mass_g`):

```
# Palmer Penguins Datensatz laden
csv_url = 'https://raw.githubusercontent.com/SchmidtPaul/ExampleData/refs/heads/main/
palmer_penguins/palmer_penguins.csv'
penguins = pd.read_csv(csv_url)

# Definiere Farben für die Pinguinarten
colors = {'Adelie': '#FF8C00', 'Chinstrap': '#A034F0', 'Gentoo': '#159090'}

# Daten für die Analyse vorbereiten
penguins_clean = penguins[['body_mass_g', 'bill_depth_mm', 'species']].dropna()
```



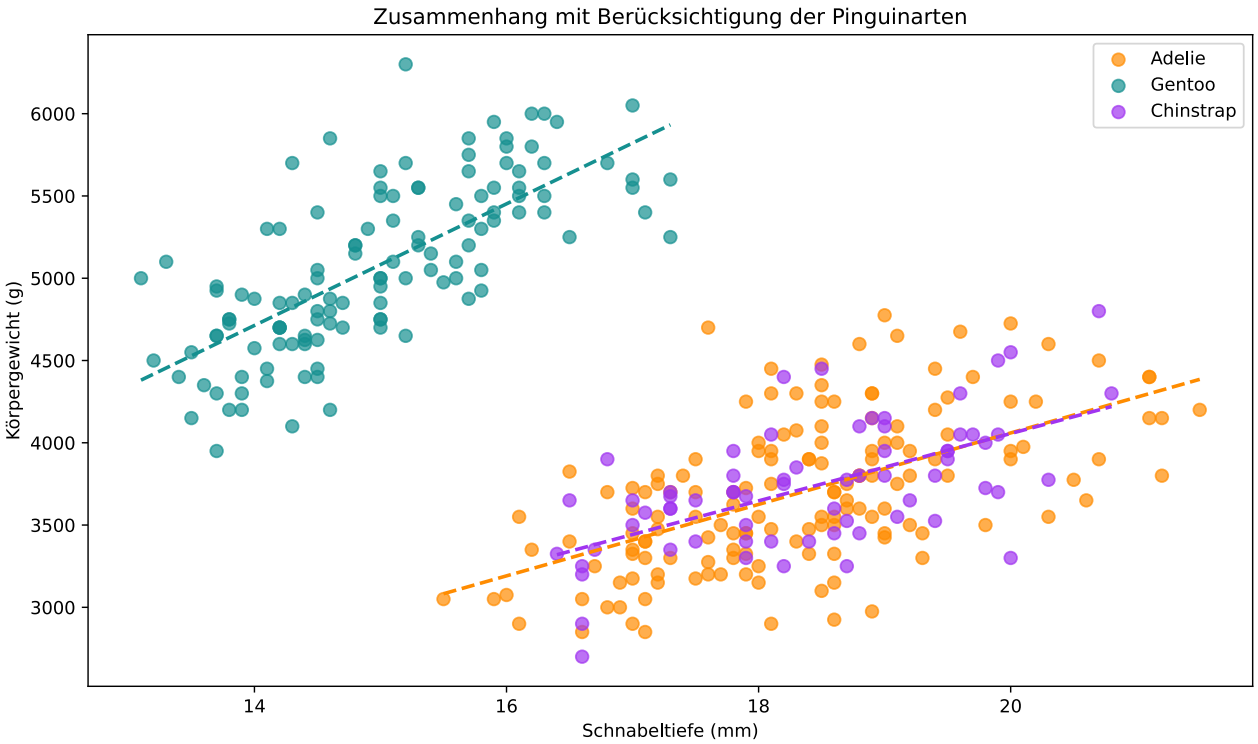

Wenn wir zunächst wirklich nur diese beiden Variablen betrachten, können wir eine Regressionsgerade wie folgt anpassen:

```
# Erster Plot: Ohne Berücksichtigung der Arten
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6), layout='tight')

# Alle Datenpunkte ohne Farbunterscheidung
ax.scatter(penguins_clean['bill_depth_mm'], penguins_clean['body_mass_g'],
           alpha=0.6, color='gray', s=50)

# Einfache Regressionsgerade über alle Daten
model_simple = smf.ols('body_mass_g ~ bill_depth_mm', data=penguins_clean).fit()
x_range = np.linspace(penguins_clean['bill_depth_mm'].min(),
                      penguins_clean['bill_depth_mm'].max(), 100)
y_pred = model_simple.predict(pd.DataFrame({'bill_depth_mm': x_range}))
ax.plot(x_range, y_pred, color='red', linewidth=2,
        label=f'Einfache Regression (R² = {model_simple.rsquared:.3f})')

ax.set_xlabel('Schnabeltiefe (mm)')
ax.set_ylabel('Körpergewicht (g)')
ax.set_title('Zusammenhang ohne Berücksichtigung der Pinguinarten')
ax.legend()
plt.show()
```




Die einfache lineare Regression zeigt zwar einen **schwachen** Zusammenhang, doch schon mit dem bloßen Augen wirken die Punkte eigenartig verteilt. Das ganze klärt sich schnell auf, wenn wir die Pinguinarten berücksichtigen. Hier ist bereits ein Vorgeschmack auf das, was wir am Ende dieses Kapitels erreichen werden:

```
# Zweiter Plot: Mit Berücksichtigung der Arten (Vorschau)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6), layout='tight')

# Datenpunkte nach Arten gefärbt
for species in penguins_clean['species'].unique():
    data = penguins_clean[penguins_clean['species'] == species]
    ax.scatter(data['bill_depth_mm'], data['body_mass_g'],
               alpha=0.7, color=colors[species], s=50, label=species)

# Separate Regressionsgeraden für jede Art (Moderationsanalyse)
for species in penguins_clean['species'].unique():
    data = penguins_clean[penguins_clean['species'] == species]
    if len(data) > 1:  # Nur wenn genügend Datenpunkte vorhanden
        model_species = smf.ols('body_mass_g ~ bill_depth_mm', data=data).fit()
        x_range_species = np.linspace(data['bill_depth_mm'].min(),
                                      data['bill_depth_mm'].max(), 100)
        y_pred_species = model_species.predict(pd.DataFrame({'bill_depth_mm':
x_range_species}))
        ax.plot(x_range_species, y_pred_species, color=colors[species],
                linewidth=2, linestyle='--')

ax.set_xlabel('Schnabeltiefe (mm)')
ax.set_ylabel('Körpergewicht (g)')
ax.set_title('Zusammenhang mit Berücksichtigung der Pinguinarten')
ax.legend()
plt.show()
```




Die Unterschiede sind dramatisch! Statt eines schwach *negativen* Gesamtzusammenhangs sehen wir nun **drei verschiedene Beziehungen** für die drei Pinguinarten. Jede Art hat nicht nur eine andere **Steigung**, sondern auch einen anderen **Achsenabschnitt**. Alle drei Steigungen sind im Gegensatz zur Steigung davor *positiv*

Dies zeigt uns, dass die Pinguinart den Zusammenhang zwischen Schnabeltiefe und Körpergewicht **moderiert** - ein klassischer Fall für eine Moderationsanalyse. Aber der Reihe nach: Beginnen wir zunächst mit der ANCOVA.

# Teil 1: ANCOVA (Analysis of Covariance)

Die **ANCOVA** (Analysis of Covariance) kombiniert die Varianzanalyse (ANOVA) mit der linearen Regression. Sie ermöglicht es uns, Gruppenunterschiede zu untersuchen, während wir gleichzeitig für eine **Kovariable** (eine metrische Variable) kontrollieren.

## Der mtcars Datensatz

Für unsere ANCOVA verwenden wir den klassischen `mtcars` Datensatz, der verschiedene Eigenschaften von Automobilen aus den 1970er Jahren enthält:

```
# mtcars Datensatz laden
mtcars = sm.datasets.get_rdataset('mtcars').data
# Relevante Variablen extrahieren und vorbereiten
mtcars_clean = mtcars[['mpg', 'am', 'hp']].copy()
# Faktor-Variable für bessere Lesbarkeit umkodieren
mtcars_clean['transmission'] = mtcars_clean['am'].map({0: 'Automatik', 1: 'Manuell'})

# Definiere Farben für die Getriebearten
transmission_colors = {'Automatik': '#00923f', 'Manuell': '#ad0000'}

mtcars_clean
```

```
                   mpg  am   hp transmission
rownames
```

```
Mazda RX4            21.0   1  110      Manuell
Mazda RX4 Wag        21.0   1  110      Manuell
Datsun 710           22.8   1   93      Manuell
Hornet 4 Drive       21.4   0  110    Automatik
Hornet Sportabout    18.7   0  175    Automatik
Valiant              18.1   0  105    Automatik
Duster 360           14.3   0  245    Automatik
Merc 240D            24.4   0   62    Automatik
Merc 230             22.8   0   95    Automatik
Merc 280             19.2   0  123    Automatik
Merc 280C            17.8   0  123    Automatik
Merc 450SE           16.4   0  180    Automatik
Merc 450SL           17.3   0  180    Automatik
Merc 450SLC          15.2   0  180    Automatik
Cadillac Fleetwood   10.4   0  205    Automatik
Lincoln Continental  10.4   0  215    Automatik
Chrysler Imperial    14.7   0  230    Automatik
Fiat 128             32.4   1   66      Manuell
Honda Civic          30.4   1   52      Manuell
Toyota Corolla       33.9   1   65      Manuell
Toyota Corona        21.5   0   97    Automatik
Dodge Challenger     15.5   0  150    Automatik
AMC Javelin          15.2   0  150    Automatik
Camaro Z28           13.3   0  245    Automatik
Pontiac Firebird     19.2   0  175    Automatik
Fiat X1-9            27.3   1   66      Manuell
Porsche 914-2        26.0   1   91      Manuell
Lotus Europa         30.4   1  113      Manuell
Ford Pantera L       15.8   1  264      Manuell
Ferrari Dino         19.7   1  175      Manuell
Maserati Bora        15.0   1  335      Manuell
Volvo 142E           21.4   1  109      Manuell
```

Für unsere ANCOVA konzentrieren wir uns auf drei Variablen:

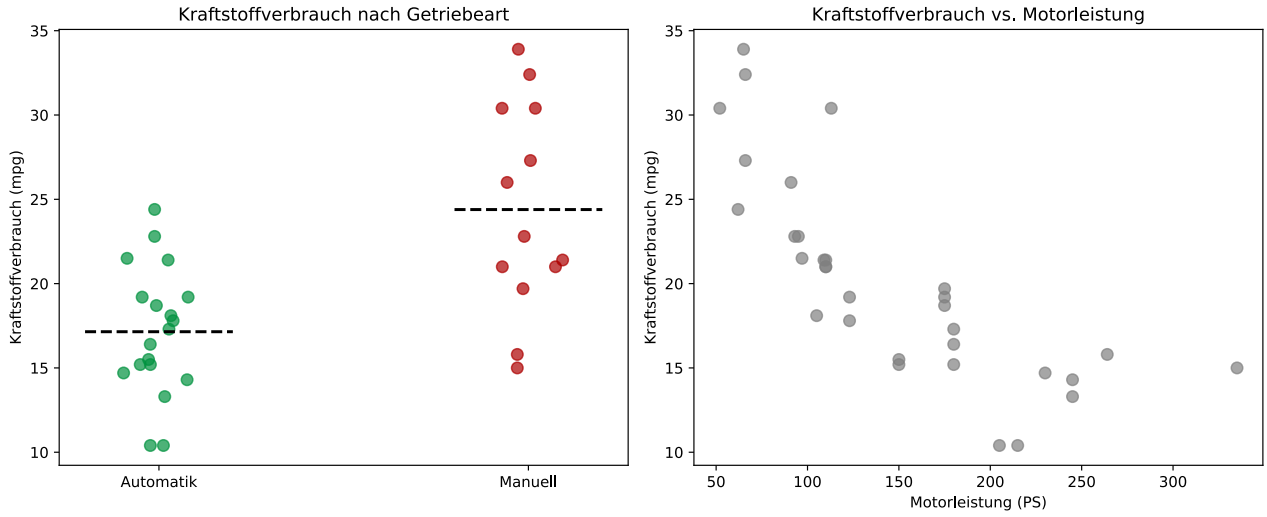
- **`mpg`** (miles per gallon): Kraftstoffverbrauch - unsere **abhängige Variable**
  - Achtung: Im Gegensatz zur in Deutschland üblichen Einheit *Liter pro 100 km*, gilt bei *miles per gallon* ein höherer Wert für einen sparsameren Kraftstoffverbrauch, da der Bezug zwischen gefahrener Strecke und verbrauchtem Kraftstoff umgekehrt ist.
- **`am`** (transmission): Getriebeart (0 = automatik, 1 = manuell) - unser **Faktor**
- **`hp`** (horsepower): Motorleistung in PS - unsere **Kovariable**

```
print("Deskriptive Statistik nach Getriebearten:")
desc_stats = mtcars_clean.groupby('transmission')[['mpg', 'hp']].agg(['mean', 'std',
'count'])
print(desc_stats.round(2))
```

```
Deskriptive Statistik nach Getriebearten:
                mpg                   hp
               mean   std count    mean    std count
transmission
Automatik     17.15  3.83    19  160.26  53.91    19
Manuell       24.39  6.17    13  126.85  84.06    13
```

Bevor wir mit der eigentlichen ANCOVA beginnen, verschaffen wir uns einen ersten Überblick über unsere Daten. Die deskriptive Statistik zeigt bereits interessante Unterschiede zwischen den Getriebearten, die wir in der folgenden Abbildung genauer betrachten:

```
# Explorative Datenanalyse
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5), layout='tight')

# Links: Kraftstoffverbrauch nach Getriebeart (Stufenvergleich)
# Jitter für bessere Sichtbarkeit
np.random.seed(42)
for i, transmission in enumerate(['Automatik', 'Manuell']):
    data = mtcars_clean[mtcars_clean['transmission'] == transmission]
    x_jitter = np.random.normal(i, 0.05, len(data))
    ax1.scatter(x_jitter, data['mpg'], alpha=0.7, s=60,
                color=transmission_colors[transmission])

    # Mittelwert als gestrichelte Linie für jede Gruppe
    mean_val = data['mpg'].mean()
    ax1.hlines(y=mean_val, xmin=i-0.2, xmax=i+0.2,
               colors="black", linestyles='--', linewidth=2)

ax1.set_xticks([0, 1])
ax1.set_xticklabels(['Automatik', 'Manuell'])
ax1.set_ylabel('Kraftstoffverbrauch (mpg)')
ax1.set_title('Kraftstoffverbrauch nach Getriebeart')

# Rechts: Scatterplot Motorleistung vs. Kraftstoffverbrauch
ax2.scatter(mtcars_clean['hp'], mtcars_clean['mpg'], alpha=0.7, s=60, color='gray')
ax2.set_xlabel('Motorleistung (PS)')
ax2.set_ylabel('Kraftstoffverbrauch (mpg)')
ax2.set_title('Kraftstoffverbrauch vs. Motorleistung')

plt.show()
```




Die linke Grafik bestätigt den deutlichen Unterschied im Kraftstoffverbrauch zwischen den Getriebearten, während die rechte Grafik die Verteilung der Motorleistung in unserem Datensatz zeigt.

# Schritt 1: Einfache ANOVA (nur Getriebeart)

Beginnen wir mit einer einfachen ANOVA, die nur die Getriebeart berücksichtigt:

```
# Einfache ANOVA: mpg ~ transmission
model_anova = smf.ols('mpg ~ C(transmission)', data=mtcars_clean).fit()
anova_simple = sm.stats.anova_lm(model_anova, typ=2)
```

```
print("ANOVA: Kraftstoffverbrauch ~ Getriebeart")
print(anova_simple.round(5))
print(f"\nKoeffizienten:")
print(model_anova.params)
print(f"\nR² = {model_anova.rsquared:.3f}")
```

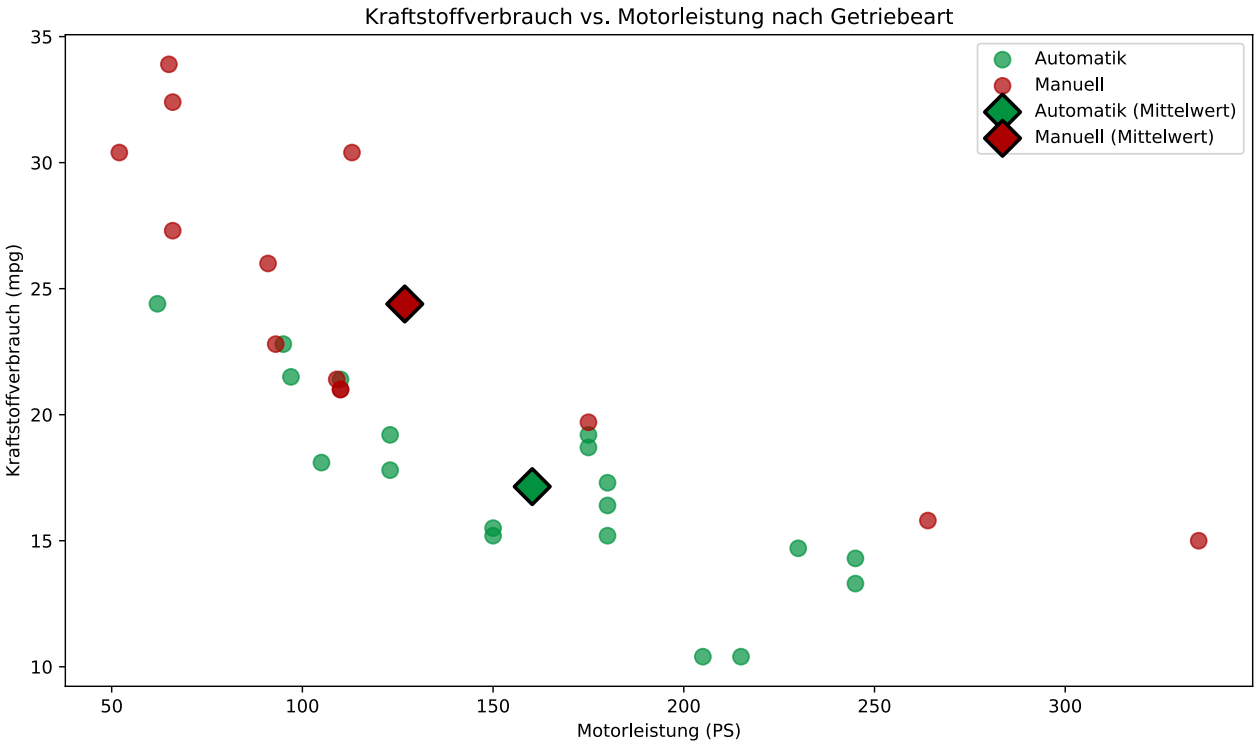
```
ANOVA: Kraftstoffverbrauch ~ Getriebeart
                    sum_sq    df         F   PR(>F)
C(transmission)  405.15059   1.0  16.86028  0.00029
Residual         720.89660  30.0       NaN      NaN

Koeffizienten:
Intercept                     17.147368
C(transmission)[T.Manuell]     7.244939
dtype: float64

R² = 0.360
```

Die ANOVA zeigt einen **signifikanten Unterschied** ($p < 0.001$) zwischen Automatik- und Schaltgetrieben. Manuelle Getriebe scheinen im Durchschnitt deutlich sparsamer zu sein.

## Schritt 2: Das Problem der konfundierenden Variable

Aber ist dieser Unterschied fair? Schauen wir uns die Verteilung der Motorleistung (PS) zwischen den beiden Getriebearten an:

```
# Visualisierung der PS-Verteilung nach Getriebeart
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6), layout='tight')

# Scatterplot: PS vs. Kraftstoffverbrauch, gefärbt nach Getriebeart
for transmission in ['Automatik', 'Manuell']:
    data = mtcars_clean[mtcars_clean['transmission'] == transmission]
    ax.scatter(data['hp'], data['mpg'], alpha=0.7, s=80,
               label=transmission, color=transmission_colors[transmission])

# Gruppenmittelwerte als Rauten einzeichnen
for transmission in ['Automatik', 'Manuell']:
    data = mtcars_clean[mtcars_clean['transmission'] == transmission]
    mean_hp = data['hp'].mean()
    mean_mpg = data['mpg'].mean()
    color = transmission_colors[transmission]
    ax.scatter(mean_hp, mean_mpg, marker='D', s=200, color=color,
               edgecolor='black', linewidth=2, zorder=5,
               label=f'{transmission} (Mittelwert)')

ax.set_xlabel('Motorleistung (PS)')
ax.set_ylabel('Kraftstoffverbrauch (mpg)')
ax.set_title('Kraftstoffverbrauch vs. Motorleistung nach Getriebeart')
ax.legend()
plt.show()
```




Hier wird das Problem deutlich: Die Fahrzeuge mit **Automatikgetriebe** in diesem Datensatz haben im Durchschnitt deutlich mehr PS als die mit manuellen Getrieben! Die **Rauten** zeigen die Gruppenmittelwerte - aber diese liegen bei **unterschiedlichen PS-Werten**. Dies ist eine **konfundierende Variable** - der scheinbare Vorteil manueller Getriebe könnte einfach daran liegen, dass sie tendenziell in schwächeren (und damit sparsameren) Fahrzeugen verbaut werden.

Im Idealfall möchten wir ja wissen, ob die Getriebeart selbst einen Einfluss auf den Kraftstoffverbrauch hat, unabhängig von der Motorleistung. Leider haben wir aber zumindest in diesem Datensatz keine gleichmäßige Verteilung der Motorleistung zwischen den Getriebearten.

### ℹ Konfundierende Variablen - weitere Beispiele

Das Problem konfundierender Variablen begegnet uns in vielen Bereichen:

**Marketing**: Kunden, die Newsletter abonniert haben, kaufen mehr. Ist der Newsletter so überzeugend? Oder sind Newsletter-Abonnenten einfach generell **kauffreudigere und engagiertere** Kunden?

**Ernährung**: Menschen, die täglich Vitaminpräparate nehmen, sind gesünder. Liegt es an den Vitaminen oder daran, dass diese Personen generell einen **gesünderen Lebensstil** (mehr Sport, bewusstere Ernährung) pflegen?

**Technik**: Laptops der Marke X haben weniger Reparaturen. Ist die Qualität besser? Oder werden diese Geräte hauptsächlich von **weniger intensiven Nutzern** verwendet?

**Ökologie**: In Gebieten mit mehr Bäumen leben mehr Vogelarten. Liegt es an den Bäumen selbst oder an anderen Faktoren wie **Wasserverfügbarkeit, Klima oder geringerer Urbanisierung**, die sowohl Bäume als auch Vögel begünstigen?

**Bildungsforschung**: Schüler aus Privatschulen schneiden bei Standardtests besser ab. Ist das der Beweis für bessere Privatschulen? Oder erklärt der **sozioökonomische Hintergrund** der Familien (höhere Bildung der Eltern, mehr Unterstützung zu Hause) den Unterschied?

# Schritt 3: Test auf Interaktion - Voraussetzung für ANCOVA

Bevor wir eine ANCOVA durchführen können, müssen wir eine wichtige **Voraussetzung**[1] prüfen: Es darf **keine signifikante Interaktion** zwischen dem Faktor (Getriebeart) und der Kovariable (Motorleistung) geben. Nur wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, können wir sinnvoll für die Kovariable "korrigieren".

```
# Test auf Interaktion: Vollständiges Modell mit Interaktionsterm
model_interaction = smf.ols('mpg ~ C(transmission) * hp', data=mtcars_clean).fit()
anova_interaction = sm.stats.anova_lm(model_interaction, typ=3)

print("Modell mit Interaktion: mpg ~ transmission * hp")
print(anova_interaction.round(5))
print(f"\nKoeffizienten:")
print(model_interaction.params.round(3))
print(f"\nR² = {model_interaction.rsquared:.3f}")
```

```
Modell mit Interaktion: mpg ~ transmission * hp
                        sum_sq    df          F   PR(>F)
Intercept           1303.96568   1.0  148.76111  0.00000
C(transmission)       33.59715   1.0    3.83288  0.06029
hp                   182.93652   1.0   20.87006  0.00009
C(transmission):hp     0.00525   1.0    0.00060  0.98065
Residual             245.43404  28.0        NaN      NaN

Koeffizienten:
Intercept                        26.625
C(transmission)[T.Manuell]        5.218
hp                               -0.059
C(transmission)[T.Manuell]:hp     0.000
dtype: float64

R² = 0.782
```

Wie wir sehen können, ist die **Interaktion nicht signifikant** ($p > 0.05$). Das ist wichtig, denn es bedeutet, dass der Einfluss der Motorleistung auf den Kraftstoffverbrauch für beide Getriebearten **gleich** ist. Mit anderen Worten: Die Steigung der Beziehung zwischen PS und mpg ist für Automatik- und Schaltgetriebe **parallel**.

Interessant ist auch, dass in diesem Modell mit Interaktionsterm der Haupteffekt der Getriebeart **nicht mehr signifikant** ist ($p > 0.05$). Das zeigt bereits, dass die Motorleistung der wichtigere erklärende Faktor ist und dass nach Kontrolle für die PS der Unterschied zwischen den Getriebearten stark abnimmt - genau das, was wir schon in Schritt 2 anhand der **Rauten** (Gruppenmittelwerte bei unterschiedlichen PS-Werten) vermutet haben.

# Schritt 4: ANCOVA - das korrigierte Modell

Da die Interaktion nicht signifikant ist, können wir sie aus dem Modell entfernen und die eigentliche **ANCOVA** durchführen:

```
# ANCOVA: mpg ~ transmission + hp (ohne Interaktion)
model_ancova = smf.ols('mpg ~ C(transmission) + hp', data=mtcars_clean).fit()
```

[1] Natürlich gelten weiterhin auch die Annahmen der ANOVA (Normalverteilung, Homoskedastizität etc.), aber diese sind hier nicht unser Fokus.

```
anova_ancova = sm.stats.anova_lm(model_ancova, typ=2)

print("ANCOVA: mpg ~ transmission + hp")
print(anova_ancova.round(5))
print(f"\nKoeffizienten:")
print(model_ancova.params.round(3))
print(f"\nR² = {model_ancova.rsquared:.3f}")
print(f"Adjustiertes R² = {model_ancova.rsquared_adj:.3f}")
```

```
ANCOVA: mpg ~ transmission + hp
                    sum_sq    df         F    PR(>F)
C(transmission)  202.23503   1.0  23.89518  0.00003
hp               475.45731   1.0  56.17789  0.00000
Residual         245.43929  29.0       NaN      NaN

Koeffizienten:
Intercept                     26.585
C(transmission)[T.Manuell]     5.277
hp                            -0.059
dtype: float64

R² = 0.782
Adjustiertes R² = 0.767
```

Das mathematische Modell der ANCOVA lautet:

$$\text{mpg}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{transmission}_i + \beta_2 \cdot \text{hp}_i + \varepsilon_i$$

Dabei ist `transmission` eine Dummy-Variable (0 für Automatik, 1 für Manuell).

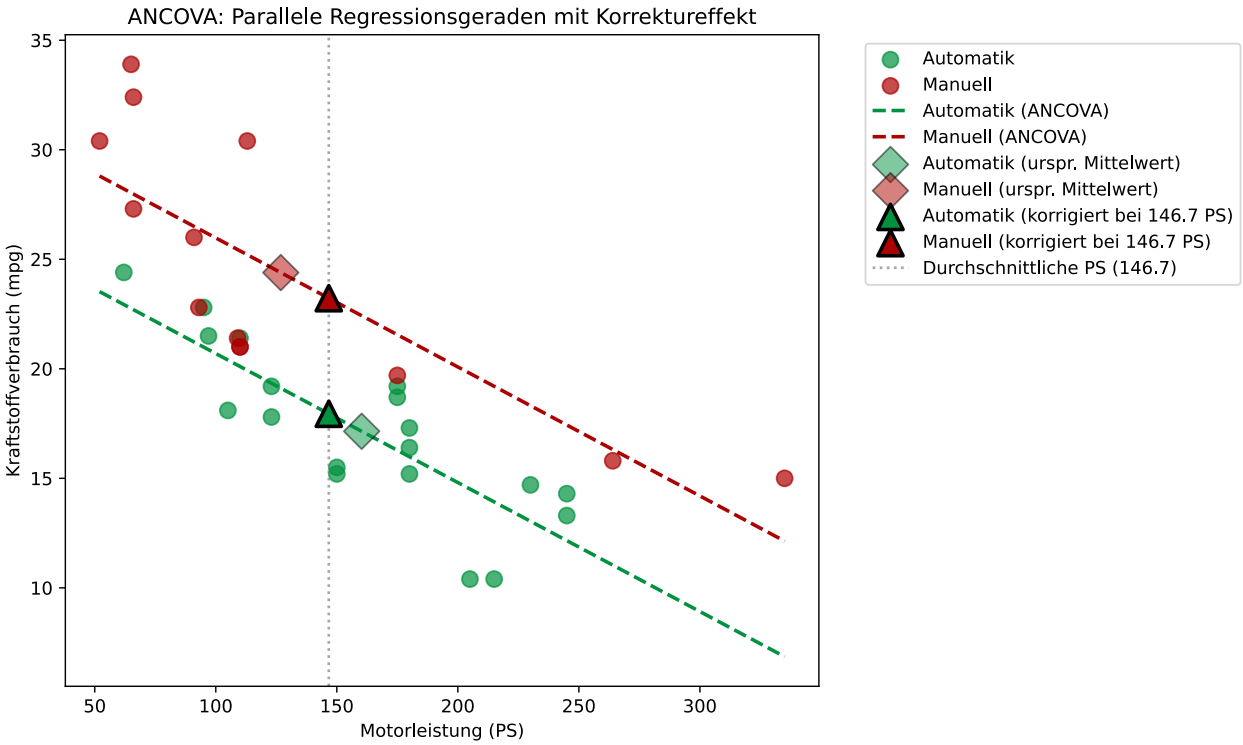
Interessant: Nachdem wir die nicht-signifikante Interaktion entfernt haben, wird der Haupteffekt der Getriebeart wieder **leicht signifikant** (je nach exakten p-Werten). Dies zeigt die Feinheiten statistischer Modellierung - kleine Änderungen im Modell können die Signifikanz beeinflussen.

# Schritt 5: Visualisierung der parallelen Regressionsgeraden

Die ANCOVA geht von **parallelen Regressionsgeraden** aus - beide Getriebearten haben die gleiche Steigung bezüglich der Motorleistung, aber möglicherweise unterschiedliche Achsenabschnitte:

```
# Visualisierung der ANCOVA: Parallele Regressionsgeraden
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6), layout='tight')

# Datenpunkte
for transmission in ['Automatik', 'Manuell']:
    data = mtcars_clean[mtcars_clean['transmission'] == transmission]
    ax.scatter(data['hp'], data['mpg'], alpha=0.7, s=80,
               label=transmission, color=transmission_colors[transmission])

# Parallele Regressionsgeraden (ANCOVA-Modell)
hp_range = np.linspace(mtcars_clean['hp'].min(), mtcars_clean['hp'].max(), 100)

# Koeffizienten aus dem ANCOVA-Modell
intercept = model_ancova.params[0]
transmission_effect = model_ancova.params[1]
hp_effect = model_ancova.params[2]
```

```
# Automatik (transmission = 0)
y_auto = intercept + hp_effect * hp_range
ax.plot(hp_range, y_auto, color=transmission_colors['Automatik'], linewidth=2,
linestyle='--',
        label='Automatik (ANCOVA)')

# Manuell (transmission = 1)
y_manual = (intercept + transmission_effect) + hp_effect * hp_range
ax.plot(hp_range, y_manual, color=transmission_colors['Manuell'], linewidth=2,
linestyle='--',
        label='Manuell (ANCOVA)')

# Ursprüngliche Gruppenmittelwerte als transparente Rauten (aus Schritt 2)
for transmission in ['Automatik', 'Manuell']:
    data = mtcars_clean[mtcars_clean['transmission'] == transmission]
    mean_hp = data['hp'].mean()
    mean_mpg = data['mpg'].mean()
    color = transmission_colors[transmission]
    ax.scatter(mean_hp, mean_mpg, marker='D', s=200, color=color,
               alpha=0.5, edgecolor='black', linewidth=1, zorder=4,
               label=f'{transmission} (urspr. Mittelwert)')

# Korrigierte Werte bei durchschnittlicher PS als Dreiecke
mean_hp_overall = mtcars_clean['hp'].mean()
# Vorhersagen bei durchschnittlicher PS
y_auto_corrected = intercept + hp_effect * mean_hp_overall
y_manual_corrected = (intercept + transmission_effect) + hp_effect * mean_hp_overall

ax.scatter(mean_hp_overall, y_auto_corrected, marker='^', s=200,
           color=transmission_colors['Automatik'], edgecolor='black', linewidth=2,
zorder=5,
           label=f'Automatik (korrigiert bei {mean_hp_overall:.1f} PS)')
ax.scatter(mean_hp_overall, y_manual_corrected, marker='^', s=200,
           color=transmission_colors['Manuell'], edgecolor='black', linewidth=2,
zorder=5,
           label=f'Manuell (korrigiert bei {mean_hp_overall:.1f} PS)')

# Vertikale Linie bei durchschnittlicher PS
ax.axvline(x=mean_hp_overall, color='gray', linestyle=':', alpha=0.7,
           label=f'Durchschnittliche PS ({mean_hp_overall:.1f})')

ax.set_xlabel('Motorleistung (PS)')
ax.set_ylabel('Kraftstoffverbrauch (mpg)')
ax.set_title('ANCOVA: Parallele Regressionsgeraden mit Korrektureffekt')
ax.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left')
plt.show()
```




Die parallelen Geraden zeigen das Kernprinzip der ANCOVA: Der Effekt der Motorleistung auf den Kraftstoffverbrauch ist **für beide Getriebearten gleich** (gleiche Steigung), aber die **Ausgangsniveaus** können sich unterscheiden.

Die **transparenten Rauten** zeigen nochmals die ursprünglichen Gruppenmittelwerte aus Schritt 2 - diese lagen bei unterschiedlichen PS-Werten und führten zu einem “unfairen” Vergleich. Die **Dreiecke** hingegen zeigen die korrigierten Werte bei der durchschnittlichen Motorleistung von 146.7 PS. Der Abstand zwischen den Dreiecken ist deutlich kleiner als zwischen den Rauten - das ist der Korrektureffekt der ANCOVA!

## Schritt 6: Der Korrektureffekt - Vorher vs. Nachher

Um zu verdeutlichen, wie stark die Kovariable unsere Schlüsse beeinflusst, vergleichen wir die ursprünglichen Mittelwerte mit den korrigierten Werten:

```
# Vergleich: Ursprüngliche vs. korrigierte Mittelwerte
print("Der Korrektureffekt der ANCOVA:")
print("=" * 40)

# 1. Ursprüngliche Mittelwerte
print("\n1. Ursprüngliche Mittelwerte (ohne Korrektur):")
original_means = mtcars_clean.groupby('transmission')['mpg'].mean()
for transmission in ['Automatik', 'Manuell']:
    print(f"   {transmission}: {original_means[transmission]:.2f} mpg")

original_diff = original_means['Manuell'] - original_means['Automatik']
print(f"   Unterschied (Manuell - Automatik): {original_diff:.2f} mpg")

# 2. Korrigierte Werte bei durchschnittlicher PS
mean_hp = mtcars_clean['hp'].mean()
print(f"\n2. Korrigierte Werte bei durchschnittlicher PS ({mean_hp:.1f} PS):")

# Vorhersagen bei durchschnittlicher PS
pred_data = pd.DataFrame({
    'transmission': ['Automatik', 'Manuell'],
```

```
    'hp': [mean_hp, mean_hp]
})

predictions = model_ancova.predict(pred_data)
for i, transmission in enumerate(['Automatik', 'Manuell']):
    print(f"   {transmission}: {predictions.iloc[i]:.2f} mpg")

corrected_diff = predictions.iloc[1] - predictions.iloc[0]
print(f"   Unterschied (korrigiert): {corrected_diff:.2f} mpg")

# 3. Zusammenfassung der Veränderung
print(f"\n3. Zusammenfassung:")
reduction = abs(original_diff) - abs(corrected_diff)
percentage_reduction = (reduction / abs(original_diff)) * 100
print(f"   Reduktion des Unterschieds: {reduction:.2f} mpg
({percentage_reduction:.1f}%)")

print(f"\n4. Visueller Vergleich:")
print(f"   Rauten in Schritt 2: Zeigen den ursprünglichen Unterschied von
{original_diff:.2f} mpg")
print(f"   Dreiecke in Schritt 5: Zeigen den korrigierten Unterschied von
{corrected_diff:.2f} mpg")
print(f"   → Die ANCOVA 'schiebt' die Vergleichspunkte auf eine faire Linie!")
```

```
Der Korrektureffekt der ANCOVA:
========================================

1. Ursprüngliche Mittelwerte (ohne Korrektur):
   Automatik: 17.15 mpg
   Manuell: 24.39 mpg
   Unterschied (Manuell - Automatik): 7.24 mpg

2. Korrigierte Werte bei durchschnittlicher PS (146.7 PS):
   Automatik: 17.95 mpg
   Manuell: 23.22 mpg
   Unterschied (korrigiert): 5.28 mpg

3. Zusammenfassung:
   Reduktion des Unterschieds: 1.97 mpg (27.2%)

4. Visueller Vergleich:
   Rauten in Schritt 2: Zeigen den ursprünglichen Unterschied von 7.24 mpg
   Dreiecke in Schritt 5: Zeigen den korrigierten Unterschied von 5.28 mpg
   → Die ANCOVA 'schiebt' die Vergleichspunkte auf eine faire Linie!
```

**ANCOVA-Fazit**: Die Kovariable “Motorleistung” erklärt einen großen Teil der Variation im Kraftstoffverbrauch. Nach Kontrolle für die PS wird der Unterschied zwischen den Getriebearten deutlich kleiner. Dies zeigt, wie wichtig es ist, konfundierende Variablen in der Analyse zu berücksichtigen, um faire Vergleiche zwischen Gruppen zu ermöglichen.

# Teil 2: Moderationsanalyse

Während die ANCOVA **keine Interaktion** zwischen Faktor und Kovariable voraussetzt, gibt es Situationen, in denen diese Interaktion durchaus von Interesse ist. Wenn die Beziehung zwischen der Kovariable und der abhängigen Variable **je nach Gruppe unterschiedlich** ist, sprechen wir von einer **Moderationsanalyse**.

# Palmer Penguins: Arten moderieren die Beziehung

Kehren wir zu unserem Palmer Penguins Beispiel zurück und untersuchen, ob die Pinguinart die Beziehung zwischen Schnabeltiefe und Körpergewicht moderiert:

```
# Moderationsanalyse: body_mass_g ~ species * bill_depth_mm
model_moderation = smf.ols('body_mass_g ~ C(species) * bill_depth_mm',
data=penguins_clean).fit()
anova_moderation = sm.stats.anova_lm(model_moderation, typ=3)

print("Moderationsanalyse: Körpergewicht ~ Art × Schnabeltiefe")
print(anova_moderation.round(5))
print(f"\nKoeffizienten:")
for param, value in model_moderation.params.items():
    print(f"{param}: {value:.2f}")
print(f"\nR² = {model_moderation.rsquared:.3f}")
print(f"Adjustiertes R² = {model_moderation.rsquared_adj:.3f}")
```

```
Moderationsanalyse: Körpergewicht ~ Art × Schnabeltiefe
                               sum_sq     df         F   PR(>F)
Intercept                 5.270569e+04    1.0   0.41841  0.51818
C(species)                3.098247e+04    2.0   0.12298  0.88432
bill_depth_mm             1.047004e+07    1.0  83.11681  0.00000
C(species):bill_depth_mm  2.074479e+06    2.0   8.23416  0.00032
Residual                  4.232519e+07  336.0       NaN      NaN

Koeffizienten:
Intercept: -283.28
C(species)[T.Chinstrap]: 247.06
C(species)[T.Gentoo]: -175.71
bill_depth_mm: 217.15
C(species)[T.Chinstrap]:bill_depth_mm: -12.53
C(species)[T.Gentoo]:bill_depth_mm: 152.29

R² = 0.807
Adjustiertes R² = 0.804
```

Das mathematische Modell der Moderationsanalyse lautet:

$$\text{body\_mass}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{species1}_i + \beta_2 \cdot \text{species2}_i + \beta_3 \cdot \text{bill\_depth}_i$$

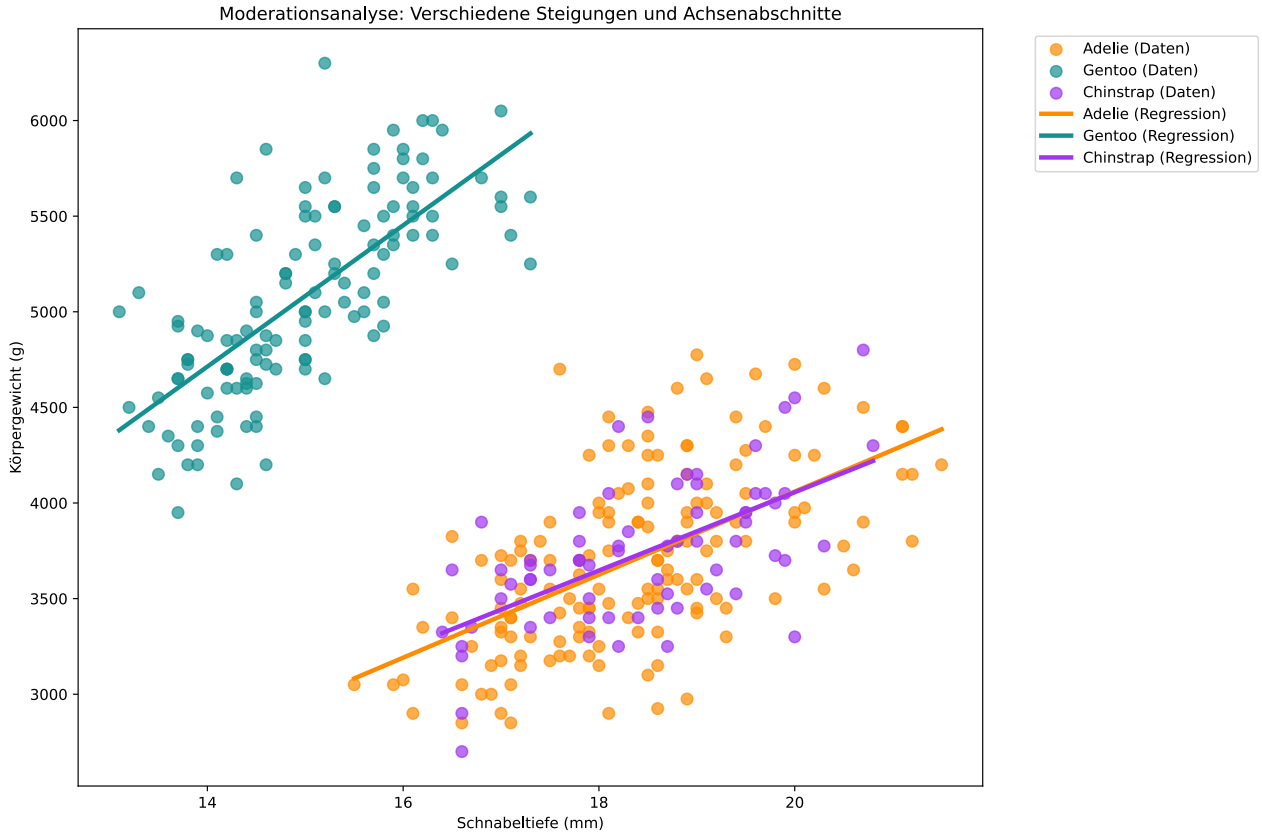
$$+\beta_4 \cdot \text{species1}_i \cdot \text{bill\_depth}_i + \beta_5 \cdot \text{species2}_i \cdot \text{bill\_depth}_i + \varepsilon_i$$

# Visualisierung: Drei verschiedene Regressionsgeraden

Im Gegensatz zur ANCOVA mit parallelen Geraden erhalten wir hier **drei unterschiedliche Regressionsgeraden**:

```
# Visualisierung der Moderationsanalyse
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 8), layout='tight')

# Datenpunkte nach Arten
for species in penguins_clean['species'].unique():
    data = penguins_clean[penguins_clean['species'] == species]
    ax.scatter(data['bill_depth_mm'], data['body_mass_g'],
               alpha=0.7, color=colors[species], s=60, label=f'{species} (Daten)')

# Separate Regressionsgeraden für jede Art basierend auf dem Interaktionsmodell
bill_depth_range = np.linspace(penguins_clean['bill_depth_mm'].min(),
```

```
                                penguins_clean['bill_depth_mm'].max(), 100)

# Einfachere Methode: Separate Modelle für jede Art
species_list = penguins_clean['species'].unique()
for species in species_list:
    species_data = penguins_clean[penguins_clean['species'] == species]
    species_model = smf.ols('body_mass_g ~ bill_depth_mm', data=species_data).fit()

    # Vorhersagen für diese Art
    x_range_species = np.linspace(species_data['bill_depth_mm'].min(),
                                  species_data['bill_depth_mm'].max(), 50)
    y_pred_species = species_model.predict(pd.DataFrame({'bill_depth_mm':
x_range_species}))

    ax.plot(x_range_species, y_pred_species, color=colors[species], linewidth=3,
            label=f'{species} (Regression)')

ax.set_xlabel('Schnabeltiefe (mm)')
ax.set_ylabel('Körpergewicht (g)')
ax.set_title('Moderationsanalyse: Verschiedene Steigungen und Achsenabschnitte')
ax.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left')
plt.show()
```



> **i** Parametrisierung bei Interaktionsmodellen
>
> Eine häufige Frage ist: Warum brauchen wir den `bill_depth_mm` Term, wenn wir doch schon `C(species):bill_depth_mm` haben?
>
> Die Antwort liegt mal wieder in der Referenzgruppen-Parametrisierung: Der Haupteffekt `bill_depth_mm` ist die Steigung für die Referenzgruppe (hier: Adelie-Pinguine). Die Interaktionsterme zeigen dann die Abweichungen von dieser Referenz-Steigung für die anderen Arten.
>
> So entstehen die drei verschiedenen Steigungen: - **Adelie**: Referenz-Steigung (Koeffizient von `bill_depth_mm`) - **Chinstrap**: Referenz-Steigung + Interaktions-Koeffizient
> - **Gentoo**: Referenz-Steigung + Interaktions-Koeffizient

# Der dramatische Unterschied: Simpson's Paradox in Aktion

Hier wird besonders deutlich, warum die Moderationsanalyse so wichtig ist. **Ohne Berücksichtigung der Pinguinarten** hätten wir einen völlig **falschen Schluss** gezogen!

Erinnern wir uns an die erste Analyse:

- **Einfache Regression (ignoriert Arten)**: Schwach **negativer** Zusammenhang ($R^2 = 0.056$)
- **Interpretation**: "Mit zunehmender Schnabeltiefe nimmt das Körpergewicht ab"

Aber die Moderationsanalyse zeigt das **Gegenteil**:

- **Artspezifische Regressionen**: Alle drei Steigungen sind **positiv**!
- **Korrekte Interpretation**: "Innerhalb jeder Art nimmt das Körpergewicht mit zunehmender Schnabeltiefe zu"

Dieses Phänomen ist ein klassisches Beispiel für **Simpson's Paradox**: Ein Trend in aggregierten Daten verschwindet oder kehrt sich sogar um, wenn die Daten in sinnvolle Untergruppen aufgeteilt werden. Die scheinbar negative Gesamtbeziehung entsteht nur dadurch, dass:

1. **Gentoo-Pinguine** generell schwerer sind UND größere Schnäbel haben
2. **Adelie-Pinguine** generell leichter sind UND kleinere Schnäbel haben
3. Die **Unterschiede zwischen den Arten** überlagern die **innerartlichen Beziehungen**

Ohne die Berücksichtigung der Moderation durch die Pinguinart hätten wir eine biologisch unsinnige Schlussfolgerung gezogen. Die Moderationsanalyse deckt die wahren, biologisch plausiblen Zusammenhänge auf: Innerhalb jeder Art sind dickere Schnäbel mit höherem Körpergewicht assoziiert.

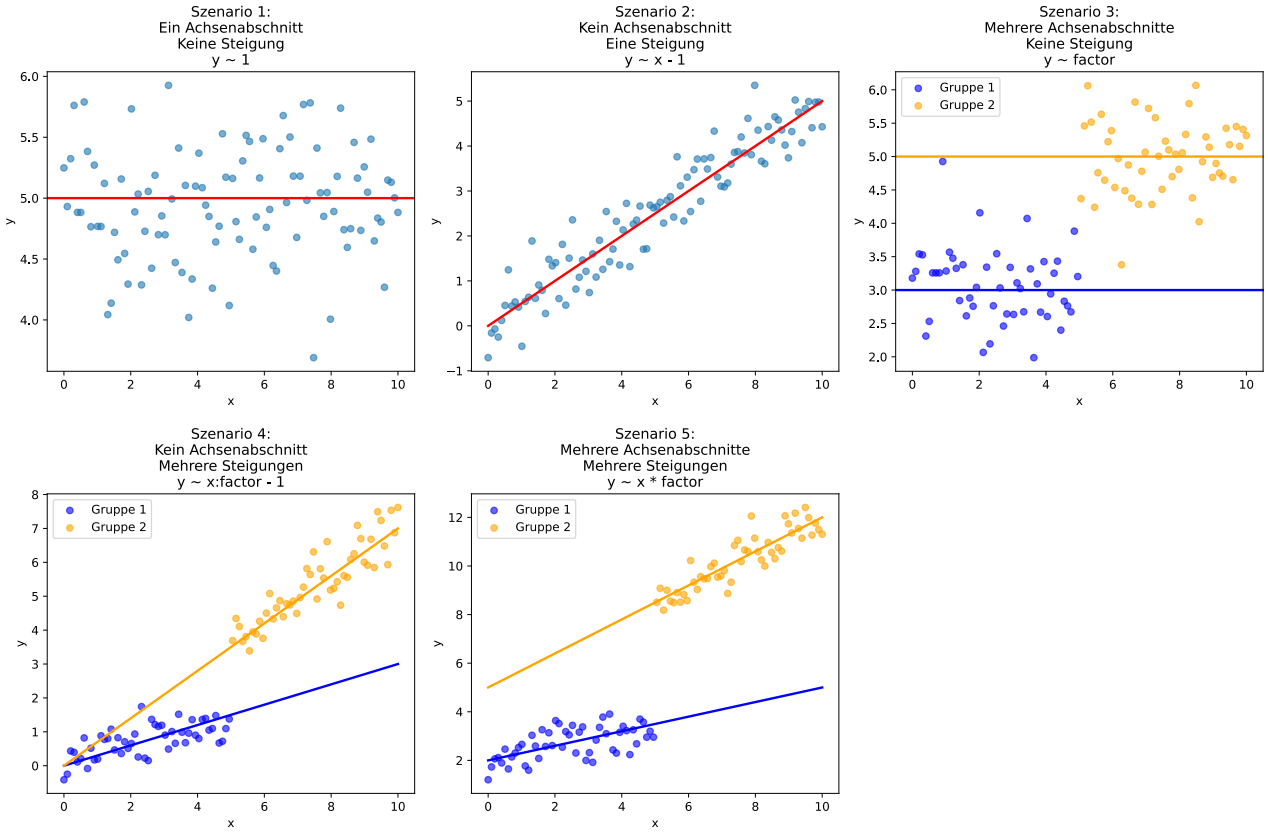
# Übersicht: Die fünf Grundszenarien

Zum Abschluss betrachten wir eine systematische Übersicht über die verschiedenen Modelltypen, die wir nun kennengelernt haben. Diese Szenarien unterscheiden sich darin, welche Parameter in der linearen Gleichung enthalten sind:

```
# Künstliche Daten für die Demonstration der Grundszenarien
np.random.seed(42)
x = np.linspace(0, 10, 100)
fig, axes = plt.subplots(2, 3, figsize=(15, 10), layout='tight')
axes = axes.flatten()
```

```
# Szenario 1: Nur Achsenabschnitt (y ~ 1)
y1 = 5 + np.random.normal(0, 0.5, 100)
axes[0].scatter(x, y1, alpha=0.6, s=30)
axes[0].axhline(y=5, color='red', linewidth=2)
axes[0].set_title('Szenario 1:\nEin Achsenabschnitt\nKeine Steigung\ny ~ 1')
axes[0].set_xlabel('x')
axes[0].set_ylabel('y')

# Szenario 2: Nur Steigung (y ~ x - 1)
y2 = 0.5 * x + np.random.normal(0, 0.5, 100)
axes[1].scatter(x, y2, alpha=0.6, s=30)
axes[1].plot(x, 0.5 * x, color='red', linewidth=2)
axes[1].set_title('Szenario 2:\nKein Achsenabschnitt\nEine Steigung\ny ~ x - 1')
axes[1].set_xlabel('x')
axes[1].set_ylabel('y')

# Szenario 3: Faktor mit 2 Stufen (y ~ factor)
group = np.repeat([0, 1], 50)
y3 = 3 + 2 * group + np.random.normal(0, 0.5, 100)
colors_simple = ['blue', 'orange']
for g in [0, 1]:
    mask = group == g
    axes[2].scatter(x[mask], y3[mask], alpha=0.6, s=30, color=colors_simple[g],
                    label=f'Gruppe {g+1}')
    axes[2].axhline(y=3 + 2*g, color=colors_simple[g], linewidth=2)
axes[2].set_title('Szenario 3:\nMehrere Achsenabschnitte\nKeine Steigung\ny ~ factor')
axes[2].set_xlabel('x')
axes[2].set_ylabel('y')
axes[2].legend()

# Szenario 4: Zwei verschiedene Steigungen (y ~ x:factor - 1)
y4 = (0.3 + 0.4 * group) * x + np.random.normal(0, 0.5, 100)
for g in [0, 1]:
    mask = group == g
    axes[3].scatter(x[mask], y4[mask], alpha=0.6, s=30, color=colors_simple[g],
                    label=f'Gruppe {g+1}')
    axes[3].plot(x, (0.3 + 0.4*g) * x, color=colors_simple[g], linewidth=2)
axes[3].set_title('Szenario 4:\nKein Achsenabschnitt\nMehrere Steigungen\ny ~ x:factor
- 1')
axes[3].set_xlabel('x')
axes[3].set_ylabel('y')
axes[3].legend()

# Szenario 5: Vollständige Regressionsgeraden (y ~ x * factor)
y5 = (2 + 3 * group) + (0.3 + 0.4 * group) * x + np.random.normal(0, 0.5, 100)
for g in [0, 1]:
    mask = group == g
    axes[4].scatter(x[mask], y5[mask], alpha=0.6, s=30, color=colors_simple[g],
                    label=f'Gruppe {g+1}')
    axes[4].plot(x, (2 + 3*g) + (0.3 + 0.4*g) * x, color=colors_simple[g], linewidth=2)
axes[4].set_title('Szenario 5:\nMehrere Achsenabschnitte\nMehrere Steigungen\ny ~ x *
factor')
axes[4].set_xlabel('x')
axes[4].set_ylabel('y')
axes[4].legend()

# Leeres Subplot entfernen
axes[5].remove()
```

```
plt.tight_layout()
plt.show()
```




Die **ANCOVA** entspricht einem Spezialfall ohne Interaktionsterm[2], während die **Moderationsanalyse** dem vollständigen Szenario 5 entspricht.

# Unterschied zwischen ANCOVA und Moderationsanalyse

Zusammenfassend lässt sich der Hauptunterschied so formulieren:

**ANCOVA (Analysis of Covariance)**:

- **Annahme**: Keine Interaktion zwischen Faktor und Kovariable
- **Ergebnis**: Parallele Regressionsgeraden (gleiche Steigung, verschiedene Achsenabschnitte)
- **Interpretation**: Die Kovariable hilft dabei, “fairere” Gruppenvergleiche zu erstellen
- **Verwendung**: Wenn man Gruppenunterschiede um eine kontinuierliche Variable bereinigen möchte

**Moderationsanalyse**:

- **Annahme**: Interaktion zwischen Faktor und kontinuierlicher Variable ist von Interesse
- **Ergebnis**: Verschiedene Regressionsgeraden (verschiedene Steigungen UND Achsenabschnitte)
- **Interpretation**: Der Faktor moderiert die Beziehung zwischen kontinuierlicher und abhängiger Variable
- **Verwendung**: Wenn der Zusammenhang zwischen zwei Variablen gruppenspezifisch ist

[2]Man könnte auch sagen Szenario 3 aber mit identischen Steigungen, die nicht 0 sind wie oben gezeigt.

Beide Ansätze sind wichtige Werkzeuge in der statistischen Modellierung und ergänzen die Palette der linearen Modelle, die wir in den vorangegangenen Kapiteln kennengelernt haben. Sie zeigen, wie flexibel und mächtig der Rahmen der linearen Modelle ist, um komplexe Beziehungen zwischen verschiedenen Arten von Variablen zu modellieren.

Weitere Ressourcen

- ANCOVA (Kovarianzanalyse): Eine Mischung aus ANOVA und Regression
- Fitting Models Is like Tetris: Crash Course Statistics #35
- Simpson’s Paradox